

# 対称軸方向に荷重された重なり円断面棒の 曲げによる剪断応力

長 元 亀 久 男  
宮 尾 嘉 寿

Shearing Stresses of a Bar with the Overlapped Circular Cross-  
Section when the Bar is Subjected to Symmetric Bending.

Kikuo NAGAMOTO  
Kazyu MIYAO

Authors have solved the shearing stresses on the cross-section of this cantilever subjected to a terminal transverse load which is parallel to one orthogonal axis of cross-section by using the bipolar coordinates. The flexure function involved in the solution is determined from the given edge conditions, with the aid of Fourier transforms.

## 1. 緒 言

種々の形の横断面をもつ cantilever が軸に直角方向の端末荷重によつて曲げられるとき横断面に生ずる剪断応力については古くからいろいろの研究がある。本報もこれに一つの場合を加えるものである。また双極座標を用いた弾性問題も多くとかれているが本問題は扱われていない様である。筆者等は梁の横断面上の任意点の座標を曲線座標理論により直角座標より双極座標に変換し、この双極座標について微分方程式および周辺条件式をみたす Saint-Venant のたわみかん数を Fourier 積分の形でとめた。さらに内接二円を横断面の周辺とする場合を円々座標を用いてといた。計算を簡単にするために曲げによるねじり作用がおこらぬ様に荷重の方向と対称軸の方向とが一致する場合のみを取扱つた。

## 2 曲 げ の 基 礎 式

一般にねじれをとみなね直棒の曲げにおいて横断面の図心  $O$  を原点として、軸方向に  $z$ , 断面上に  $x, y$  軸をとり、 $x$  軸の方向集中荷重  $W$  が作用するとき、棒の横断面上  $xy$  方向の剪断応力はそれぞれ次式であらわされる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= -\frac{W}{2(1+\sigma)I} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{2} \delta x^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) x^2 \right\} \\ \tau_y &= -\frac{W}{2(1+\sigma)I} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial y} + (2+\sigma)xy \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに  $\sigma$  はポンプ比,  $I$  は中立軸  $y$  のまわりの横断面の慣性モーメント,  $\chi$  は横断面の任意点で

$$\nabla^2 \chi = 0 \qquad \Delta^2 \chi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \dots\dots\dots (2)$$

周辺で

$$\frac{\partial \chi}{\partial \nu} = -\left\{ \frac{\sigma}{2} x^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) y^2 \right\} \cos(x\nu) - (2+\sigma)xy \cos(y\nu) \dots\dots\dots (3)$$

をみたすたわみかん数である。ただし  $\nu$  は周辺曲線の外方に引いた法線とする。

さて横断面の変換曲線座標として

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \beta / (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ &= a \sinh \alpha / (\cosh \alpha - \cos \beta) \quad (-\infty < \alpha < \infty, 0 < \beta < 2\pi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

写像縮小率

$$h = (\cosh \alpha - \cos \beta) / a$$

であらわされる双極座標を用いると横断面の形は  $\alpha = -\infty \sim \infty$ ,  $\beta = (0 <) \beta_2 \sim \beta_1 (< 2\pi)$  なる  $\alpha$  軸に平行な無限長帯状領域に写像される。(1), (2), (3) 式を(4)式の座標に変換する。(2) 式は周知のごとく

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) x = 0 \dots\dots\dots (5)$$

となる。第1図の様に  $S_\beta$  を  $\beta$  曲線の  $\alpha$ - 定点における法線 ( $\beta$  値の増加する向きを正にとる) とすれば  $S_\beta$  の線素は  $dS_\beta = d\beta/h^{(3)}$  であり, かつ  $\nu$  は  $S_\beta$  に一致するから次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \partial x / \partial \nu &= \partial x / \partial S_\beta = h \cdot \partial x / \partial \beta \\ \cos(x\nu) &= \cos(x, S_\beta) = h \cdot \partial x / \partial \beta \\ \cos(y\nu) &= \cos(y, S_\beta) = h \cdot \partial y / \partial \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

(6) 式を (3) に入れると  $\beta$ - 一定曲線の周辺条件式は次式の様になる。

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = - \left\{ \frac{\sigma}{2} x^2 + \left( 1 - \frac{\sigma}{2} \right) y^2 \right\} \frac{\partial x}{\partial \beta} - (2 + \sigma) xy \frac{\partial y}{\partial \beta} \dots\dots\dots (7)$$

次に  $\tau_a \tau_\beta$  をそれぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$  曲線に対して法線方向 (それぞれの値の増加する向きを正にとる) の剪断応力とすれば,  $\tau_a \tau_\beta$  は

$$\left. \begin{aligned} \tau_a &= \tau_x \cos(xS_a) + \tau_y \cos(y, S_a) \\ \tau_\beta &= \tau_x \cos(xS_\beta) + \tau_y \cos(y, S_\beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

でありこれは次式の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_a &= h \left( \tau_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \tau_y \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \\ \tau_\beta &= h \left( \tau_x \frac{\partial x}{\partial \beta} + \tau_y \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

一方

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} &= \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

であるから (1), (9), (10) 式より次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_a &= -\frac{W}{2(1+\sigma)I} h \left\{ \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \left\{ \frac{\sigma}{2} x^2 + \left( 1 - \frac{\sigma}{2} \right) y^2 \right\} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + (2 + \sigma) xy \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right\} \\ \tau_\beta &= -\frac{W}{2(1+\sigma)I} h \left\{ \frac{\partial x}{\partial \beta} + \left\{ \frac{\sigma}{2} x^2 + \left( 1 - \frac{\sigma}{2} \right) y^2 \right\} \frac{\partial x}{\partial \beta} + (2 + \sigma) xy \frac{\partial y}{\partial \beta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

合成剪断応力は  $\tau = \sqrt{\tau_a^2 + \tau_\beta^2}$

で求め得る。

### 3. $y$ 軸が水平の場合

この場合のたわみかん数を  $x_1$  とし, 第2図の様に中立軸  $y'$  と  $y$  軸の距離を  $e = ut$  であらわすと (7)式は

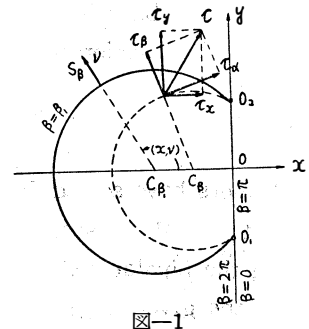


図-1

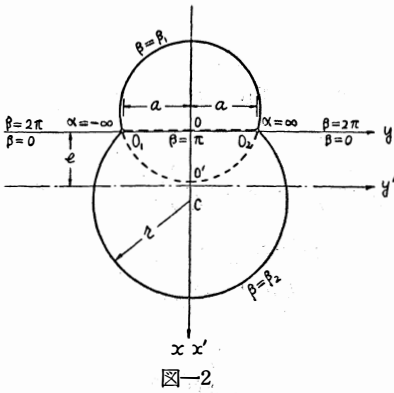


図-2

$$\frac{\partial x_1}{\partial \beta} = -\frac{\alpha^3}{2} \left\{ \frac{p_1(\beta)}{\cosh \alpha - \cos \beta} + \frac{p_2(\beta)}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} + \frac{p_3(\beta)}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^3} + \frac{p_4(\beta)}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^4} \right\}$$

$$p_1(\beta) = (2-\sigma)\cos\beta + 2(2+\sigma)t\sin\beta + \sigma t^2\cos\beta$$

$$p_2(\beta) = 2(2-\sigma) + (4+\sigma)t\sin 2\beta - (10-\sigma+\sigma t^2)\sin^2\beta$$

$$p_3(\beta) = -2(7\cos\beta + 2t\sin\beta)\sin^2\beta$$

$$p_4(\beta) = 6\sin^4\beta \dots\dots\dots (12)$$

となる  $x_1$  として

$$x_1 = \alpha^3 \int_0^\infty \{A_n \cosh n(\beta - \beta_2) - B_n \cosh n(\beta_1 - \beta)\} / n \sinh n(\beta_1 - \beta_2) \cos n \alpha dn \dots\dots\dots (13)$$

の形をとり、積分式<sup>(4)</sup>

$$\int_0^\infty \{1/(\cosh \alpha - \cos \beta)\} \cos n \alpha d\alpha = \pi \sinh n(\pi - \beta) / \sin \beta \sinh n\pi \quad (0 < \beta < 2\pi) \quad (14)$$

を用い  $\beta = \beta_1$  において (12) 式を Fourier 積分の形に展開し (13) 式と等置すると

$$A_n = \{f_1(\beta_1) \sinh n(\pi - \beta_1) + f_2(\beta_1) n \cosh n(\pi - \beta_1) + f_3(\beta_1) n^2 \sinh n(\pi - \beta_1) + n^3 \cosh n(\pi - \beta_1)\} / \sinh n\pi$$

$$f_1(\beta_1) = 2(1+\sigma)(\cos\beta_1 - t\sin\beta_1) / \sin^3\beta_1$$

$$f_2(\beta_1) = \{(1+\sigma)(2 - t\sin 2\beta_1) - \sigma(1 - t^2)\sin^2\beta_1\} / \sin^2\beta_1$$

$$f_3(\beta_1) = \cos\beta_1 + 2t\sin\beta_1 / \sin\beta_1 \dots\dots\dots (15)$$

同様にして  $\beta = \beta_2$  において  $B_n$  がもとめられ、その値は (15) 式で  $\beta_1$  を  $\beta_2$  にかえればよい。ここに  $t$  は次式であたえる。

$$t = \frac{\{(1 + (\pi - \beta_1) \cot \beta_1) \operatorname{cosec}^2 \beta_1 - \{1 + (\pi - \beta_2) \cot \beta_2\} \operatorname{cosec}^2 \beta_2\}}{\cot \beta_1 - \cot \beta_2 + (\pi - \beta_1) \operatorname{cosec}^2 \beta_1 - (\pi - \beta_2) \operatorname{cosec}^2 \beta_2} \dots\dots\dots (16)$$

この様にして求めた  $x_1$  より剪断応力は次の様になる。

$$\tau_\alpha = \frac{\alpha^2 W}{2(1+\sigma)I_1} \left\{ (\cosh \alpha - \cos \beta) \int_0^\infty \frac{A_n \cosh n(\beta - \beta_2) - B_n \cosh n(\beta_1 - \beta)}{\sinh n(\beta_1 - \beta_2)} \sin n \alpha dn + \frac{\sinh \alpha}{2(\cosh \alpha - \cos \beta)} \left\{ g_1(\beta) + \frac{g_2(\beta)}{\cosh \alpha - \cos \beta} + \frac{g_3(\beta)}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \right\} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\tau_\beta = -\frac{\alpha^2 W}{2(1+\sigma)I_1} \left\{ (\cosh \alpha - \cos \beta) \int_0^\infty \frac{A_n \sinh n(\beta - \beta_2) + B_n \sinh n(\beta_1 - \beta)}{\sinh n(\beta_1 - \beta_2)} \cos n \alpha dn + \frac{1}{2} \left\{ p_1(\beta) + \frac{p_2(\beta)}{\cosh \alpha - \cos \beta} + \frac{p_3(\beta)}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} + \frac{p_4(\beta)}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^3} \right\} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} g_1(\beta) &= -2(2+\sigma)t\cos\beta + (2-\sigma+\sigma t^2)\sin\beta \\ g_2(\beta) &= 4(2\cos\beta + t\sin\beta)\sin\beta \\ g_3(\beta) &= -6\sin^3\beta \\ p_1(\beta) \sim p_4(\beta) &\text{ は (12) 式に同じ} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$I_1 = \frac{\alpha^4}{12} \left\{ 3(\pi - \beta_1)(4 - 5\operatorname{cosec}^2 \beta_1) \operatorname{cosec}^2 \beta_1 - 3(\pi - \beta_2)(4 - 5\operatorname{cosec}^2 \beta_2) \operatorname{cosec}^2 \beta_2 + (2 - 15\operatorname{cosec}^2 \beta_1) \cot \beta_1 - (2 - 15\operatorname{cosec}^2 \beta_2) \cot \beta_2 + \frac{12\{(1 + \pi - \beta_1) \cot \beta_1\} \operatorname{cosec}^2 \beta_1 - \{(1 + \pi - \beta_2) \cot \beta_2\} \operatorname{cosec}^2 \beta_2\}^2}{\cot \beta_1 - \cot \beta_2 + (\pi - \beta_1) \operatorname{cosec}^2 \beta_1 - (\pi - \beta_2) \operatorname{cosec}^2 \beta_2} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

(17), (18)式によつて断面上の剪断応力の分値が計算され合成剪断応力は

$$\tau = \sqrt{\tau_a^2 + \tau_\beta^2}$$

よりもとめられる。 $\beta_1 - \beta_2 = \pi$  のとき断面は円形になり、中心の剪断応力は (18) 式より次式の様になる。

$$\left\{ \tau_\beta \right\}_{\alpha=0, \beta=\beta_2} = -\frac{W}{2(1+\sigma)I_1} \left( \frac{\sigma}{2} + \frac{3}{4} \right) \frac{\alpha^2}{\sin^2 \beta_2} = -\frac{W}{2(1+\sigma)I_1} \left( \frac{\sigma}{2} + \frac{3}{4} \right) \Omega^2 \dots \dots (21)$$

茲に  $\Omega$  は断面円の半径である。断面周辺にたとへば  $\beta = \beta_2$  における剪断応力は

$$\tau = \left\{ \tau_a \right\}_{\beta=\beta_2} = \frac{\alpha^2 W}{2(1+\sigma)I} \left\{ (\cosh \alpha - \cos \beta_2) \int_0^\infty \frac{A_n - B_n \cosh n(\beta_1 - \beta_2)}{\sinh n(\beta_1 - \beta_2)} \sin n \alpha dn \right. \\ \left. + \frac{\sinh \alpha}{2(\cosh \alpha - \cos \beta_2)} \left\{ g_1(\beta_2) + \frac{g_2(\beta_2)}{\cosh \alpha - \cos \beta_2} + \frac{g_3(\beta_2)}{(\cosh \alpha - \cos \beta_2)^2} \right\} \right\} \dots \dots (22)$$

となる。また  $\beta_1 = \pi$  とすれば弓形断面となり直線周辺の剪断応力は次式の様になる。

$$\tau = \left\{ \tau_a \right\}_{\beta=\pi} = \frac{\alpha^2 W}{2(1+\sigma)I} \left\{ (\cosh \alpha + 1) \int_0^\infty \frac{A_n \cosh n(\pi - \beta_2) - B_n}{\sinh n(\pi - \beta_2)} \sin n \alpha dn \right. \\ \left. + \frac{(2+\sigma)t \sinh \alpha}{\cosh \alpha + 1} \right\} \dots \dots (23)$$

断面二円弧の交点における剪断応力については、この種の問題について行われる様に留数定理による複素積分公式

$$\int_0^\infty Q(x) \sin \alpha x dx = \pi \sum R \quad (\alpha > 0) \\ (\text{茲に } R \text{ は } Q(z)e^{iaz} \text{ の留数})$$

を(22)式に適用し  $\alpha \rightarrow \infty$  における極限の値を途中の計算を省略し結果のみを書くと次の様になる。即ち交点が凹点か、平ら(平形)か、▲点かにしたがつて

$$\left\{ \tau_a \right\}_{\alpha=\infty, \beta=\beta_2} = \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{(1+2\sigma)W}{(1+\sigma)I_1} \Omega^2 \sin \beta_2 & (\beta_1 - \beta_2 > \pi) \\ 0 & (\beta_1 - \beta_2 = \pi) \\ -\frac{1}{4} \frac{(1+2\sigma)W}{(1+\sigma)I_1} \Omega^2 \sin \beta_2 & (\beta_1 - \beta_2 < \pi) \end{cases}$$

となる数値計算例として上下対称形三種について断面周辺剪断応力分布を(22)式によつてもとめた。即ち (a)  $\beta_1 = \pi/4$ , (b)  $\beta_1 = \pi/2$  (c)  $\beta_1 = 3\pi/4$  の三種について第3図を得た。但し  $\sigma = 0.3$  にとつた。 $\beta_1$  と  $\beta_2$  の種々の組合せによりタービン翼型、送風機翼型、弓形、半円、フラットキー溝のある軸、キー溝のある軸の断面に似た形に工学上応用も広いと考えられる。

#### 4. $\alpha$ 軸が水平の場合

第4図の様に  $y$  軸の負の向きに荷重がかかるとき荷重の方向に対し断面を対称にすると周辺曲線は  $\beta = \beta_1$   $\beta = 2\pi - \beta_1$  となる。この場合のたわみ函数を  $x_2$  とすれば周辺条式は次式の様になる。

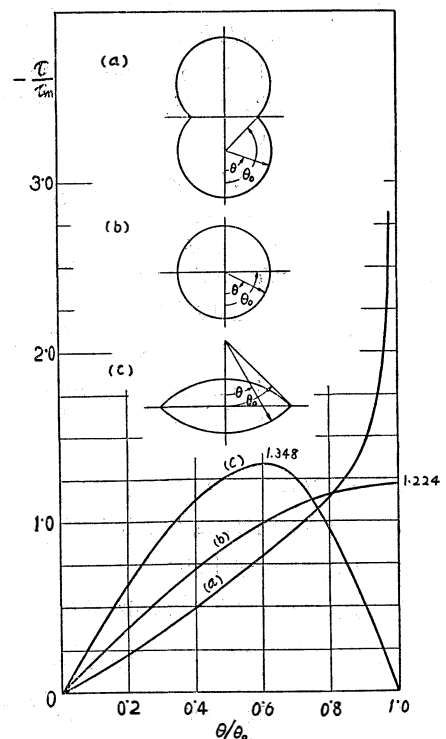


図-3



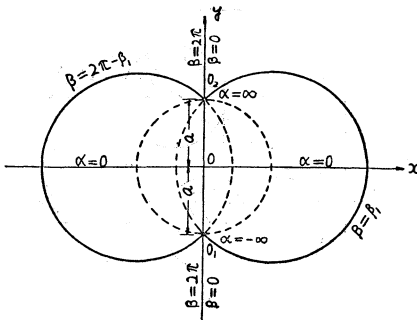


図-4

$$\frac{\partial x_2}{\partial \beta} = \frac{\alpha^3}{2} \frac{\sin \beta \sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta} \left\{ \frac{\sigma}{\cosh \alpha - \cos \beta} - \frac{4 \cos \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} + \frac{6 \sin^2 \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^3} \right\} \quad (24)$$

$x_2$  を

$$x_2 = -\alpha^3 \int_0^\infty \frac{C_n \cosh n(2\pi - \beta_1 - \beta) + \cosh n(\beta - \beta_1)}{n \sinh 2n(\pi - \beta_1)} \times \sin n \alpha d n \quad (25)$$

とおき、積分式

$$\int_0^\infty \{ \sinh \alpha / (\cosh \alpha - \cos \beta)^2 \} \sin n \alpha d \alpha = n \pi \sinh n \quad (26)$$

$$(\pi - \beta) / \sin \beta \sinh n \pi \quad (0 < \beta < 2\pi) \quad (26)$$

を用いて  $\beta = \beta_1$  において(24)式を Fourier 積分に展開し  $C_n$  を定めると

$$C_n = n \{ 1 + \sigma + \cot^2 \beta_1 \} \sinh n(\pi - \beta_1) + n \cot \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1) + n^2 \sinh n(\pi - \beta_1) \} / \sinh n \pi \quad (27)$$

をうる。この様に定めた  $x_2$  より剪断応力は次式の様になる。

$$\tau_\alpha = -\frac{\alpha^2 W}{2(1+\sigma)I_2} \left\{ (\cosh \alpha - \cos \beta) \int_0^\infty C_n \frac{\cosh n(2\pi - \beta_1 - \beta) + \cosh n(\beta - \beta_1)}{\sinh 2n(\pi - \beta_1)} \cos n \alpha d n + \frac{1}{2} \left\{ \sigma \cos \beta + \frac{\sigma(1+\cos^2 \beta) + 4 \sin^2 \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta} + \frac{10 \sin^2 \beta \cos \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} - \frac{6 \sin^4 \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^3} \right\} \right\} \quad (28)$$

$$\tau_\beta = \frac{\alpha^2 W}{2(1+\sigma)I_2} \left\{ (\cosh \alpha - \cos \beta) \int_0^\infty \frac{C_n \sinh n(2\pi - \beta_1 - \beta) \sinh n(\beta - \beta_1)}{\sinh 2n(\pi - \beta_1)} \sin n \alpha d n - \frac{\sin \beta \sinh \alpha}{2(\cosh \alpha - \cos \beta)} \left\{ \sigma - \frac{4 \cos \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta} + \frac{6 \sin^2 \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \right\} \right\} \quad (29)$$

$$\text{茲に } I_2 = \frac{\alpha^4}{6} \left\{ (2 + 3 \operatorname{cosec}^2 \beta_1) \cot \beta_1 + 3(\pi - \beta_1) \operatorname{cosec}^4 \beta_1 \right\} \quad (30)$$

断面図辺の剪断応力は(28)式より

$$\left[ \tau_d \right]_{\beta=\beta_1} = \frac{\alpha_2 W}{4(1+\sigma)I_2} \left\{ \frac{\cos \beta_1}{\sin^2 \beta_1} - \frac{1+2\sigma}{\cosh \alpha - \cos \beta_1} - 2 \cot \beta_1 (\cosh \alpha - \cos \beta_1) \int_0^\infty \frac{n^2 \cos n \alpha d n}{\sinh n \pi \sinh n(\pi - \beta_1)} \right\} \quad (31)$$

断面周辺円弧交点の剪断応力は前例と同様

$$\text{公式} \quad \int_0^\infty Q(x) \cos \alpha x dx = \pi i \Sigma R$$

によつて計算すると  $\beta_1$  の値如何にかかわらず常に剪断応力は零である。

$\beta_1 \rightarrow 0$  とすれば断面に横に接触する二円となる。周辺剪断応力は接点において零、円の中心に対して接点の反対側において最大でその値は  $[\tau_m]$  を断面の平均剪断応力とすれば

$$\left[ \tau_\alpha / \tau_m \right]_{\beta=0}^{\alpha=0} = -\frac{1+4\sigma}{1+\sigma} \quad (32)$$

となる。また  $\beta_1 = \pi/2$  とれば  $\Omega = \alpha^2$  の円形断面になり中心の剪断応力を(28)式より計算すると

$$\left[ \tau_\alpha \right]_{\beta=\pi}^{\alpha=0} = -\frac{W}{2(1+\sigma)I_2} \left( \frac{\sigma}{2} + \frac{3}{4} \right) \Omega^2 \quad (33)$$

となり既知の結果に一致する。

数値計算例として (a)  $\beta_1 = \pi/16$ , (b)  $\beta_1 = \pi/4$ , (c)  $\beta_1 = \pi/2$ , (d)  $\beta_1 = 3\pi/4$  の4種について断面周辺応力分布を(31)式によつて計算し、第5図を得た。但し  $\sigma = 0.3$  にとつた。最大周辺剪断応力は  $\alpha = 0$  即ち  $\theta/\theta_0 = 0$  において生じ、断面が接触二円に近い程大になることがわかる。前述の様に接触二円の最大周辺剪断応力値は(32)式であたえられ、同式で  $\sigma = 0.3$  とすれば  $\tau = -1.69231\tau_m$  を得る。

### 5. 内接二円を断面の周辺とする場合

第2図の二極  $O_1, O_2$  が原点  $O$  に一致した場合を

$$\begin{aligned} x &= C\xi/(\xi^2 + \eta^2) & y &= -C\eta/(\xi^2 + \eta^2) \\ h &= (\xi^2 + \eta^2)/C \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (34)$$

であらわされる円々座標を用いると断面は第6図の様に  $\xi = (0 <) \xi_2 \sim \xi_1 (< \infty)$ ,  $\eta = -\infty \sim \infty$  の無限長帯状領域に写像される。荷重が  $x$  方向に作用するものとし、たわみかん数を  $x_3$  とすれば次式の様になる。

$$x_3 = C^3 \int_0^\infty \frac{E_n \cosh n(\xi - \xi_2) - F_n \cosh n(\xi_1 - \xi)}{n \sinh n(\xi_1 - \xi_2)} \cos n \eta d\eta \quad \dots\dots\dots (35)$$

茲に

$$\begin{aligned} E_n &= [2(1+\sigma)(1-2t\xi_1) + 2n\xi_1\{(1+\sigma)(1-2t\xi_1) + \\ &\quad 2\sigma t^2\xi_1^2\} + n^2\xi_1^2(1+4t\xi_1) - n^3\xi_1^3] e^{-n\xi_1} / 8\xi_1^3 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$F_n$ は(36)式において  $\xi_1$  を  $\xi_2$  にかえる。 $x_3$  より剪断応力は(37)(38)式となる。

$$\begin{aligned} \tau_\xi &= -\frac{C^2 W}{2(1+\sigma)I_3} \left[ (\xi^2 + \eta^2) \int_0^\infty \frac{E_n \sinh n(\xi_1 - \xi_2) + F_n \sinh n(\xi_1 - \xi)}{-\xi_2} \cos n \eta d\eta - \frac{1}{2} \left\{ q_1(\xi) + \frac{q_2(\xi)}{\xi^2 + \eta^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{q_3(\xi)}{(\xi^2 + \eta^2)^2} + \frac{q_4(\xi)}{(\xi^2 + \eta^2)^3} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_\eta &= \frac{C^2 W}{2(1+\sigma)I_3} \left[ (\xi^2 + \eta^2) \int_0^\infty \frac{E_n \cosh n(\xi - \xi_2) - F_n \cosh n(\xi_1 - \xi)}{\sinh n} \sin n \eta d\eta + \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ k_1(\xi) + \frac{k_2(\xi)}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{k_3(\xi)}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} q_1(\xi) &= -\sigma t^2 \\ q_2(\xi) &= \sigma - 2 - 2(4+\sigma)t\xi + 2\sigma t^2 \xi^2 \\ q_3(\xi) &= 2(7+4t\xi)\xi^3 \\ q_4(\xi) &= -12\xi^4 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

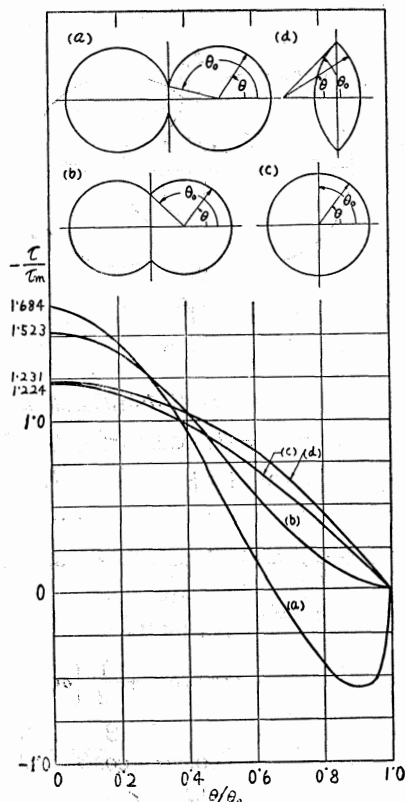


図-5

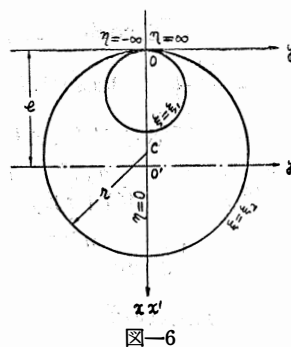


図-6

$$\left. \begin{aligned} k_1(\xi) &= (2+\sigma)t - \sigma t^2 \\ k_2(\xi) &= -(\sigma + 2tk)\xi \\ k_3(\xi) &= 6\xi^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

$$t = \frac{\xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{2\xi_1\xi_2(\xi_1 + \xi_2)} \dots\dots\dots (41)$$

$$I_3 = \frac{\pi}{64} \frac{(\xi_1 - \xi_2)\{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 + 2\xi_1\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\}}{\xi_1^4\xi_2^4(\xi_1 + \xi_2)} \dots\dots\dots (42)$$

とする。

## 6. 断面の面積，図心，慣性モーメントについて

(16), (20), (30), (41), (42) 式に結果のみを示したが，断面の面積，図心，慣性モーメントのもとめ方について考えるに色々な方法があるが<sup>(9)</sup> 茲では又この問題に関し一つの方法について記することにする。面積，図心の位置， $x$ 軸， $y$ 軸のまわりの慣性モーメントをそれぞれ $f$ ， $e$ ， $I_x$ ， $I_y$ ，とするとその定義より次の式が記される。

$$f = \iint df \dots\dots\dots (43)$$

$$e = \frac{1}{f} \iint x df \dots\dots\dots (44)$$

$$I_x = \iint y^2 df \dots\dots\dots (45)$$

$$I_y = \iint x^2 df \dots\dots\dots (46)$$

しかるに面積の増分  $df$  は

$$df = d\alpha d\beta / h^2 = a^2 d\alpha d\beta / (\cosh\alpha - \cos\beta)^2 \dots\dots\dots (47)$$

であるから，これと(4)式を(43)～(46)式に用いて

$$f = 2a^2 \int_{\beta_2}^{\beta_1} d\beta \int_0^\infty \frac{d\alpha}{(\cosh\alpha - \cos\beta)^2} \dots\dots\dots (48)$$

$$e = \frac{2a^3}{f} \int_{\beta_2}^{\beta_1} \sin\beta d\beta \int_0^\infty \frac{d\alpha}{(\cosh\alpha - \cos\beta)^3} \dots\dots\dots (49)$$

$$I_x = 2a^4 \int_{\beta_2}^{\beta_1} d\beta \int_0^\infty \frac{\sinh^2\alpha d\alpha}{(\cosh\alpha - \cos\beta)^4} \dots\dots\dots (50)$$

$$I_y = 2a^4 \int_{\beta_2}^{\beta_1} \sin^2\beta d\beta \int_0^\infty \frac{d\alpha}{(\cosh\alpha - \cos\beta)^4} \dots\dots\dots (51)$$

をうる。上の式で  $\alpha$  に関する積分は(14)において  $n=0$  として得られる式

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\cosh\alpha - \cos\beta} = \frac{\pi - \beta}{\sin\beta} \quad (0 < \beta < 2\pi) \dots\dots\dots (52)$$

を $\beta$ について微分した。

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{(\cosh\alpha - \cos\beta)^2} = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{(\pi - \beta)\cos\beta}{\sin^3\beta} \dots\dots\dots (53)$$

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{(\cosh\alpha - \cos\beta)^3} = \frac{(\pi - \beta)(3\cos^2\beta + 2\sin^2\beta) + 3\sin\beta\cos\beta}{2\sin^5\beta} \dots\dots\dots (54)$$

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{(\cosh\alpha - \cos\beta)^4} = \frac{3(\pi - \beta)5 - 2\sin^2\beta\cos\beta + (15 - 11\sin^2\beta)\sin\beta}{6\sin^7\beta} \dots\dots\dots (54)$$

を用いる。 $\beta$ に関しては通常の積分を遂行すると容易にもとまる。

第2図において図心  $O'$  を通る  $y'$  軸のまわりの慣性モーメントを  $I_{y'}$  とすれば

$$I_{y'} = I_y + fe^2 \dots\dots\dots (56)$$

の関係がある。円々座標に関しても全く同様にとまる。

## 7. 結 語

以上二円弧を断面とする真直棒の曲げによる剪断応力を理論的に解析し、数値計算により数種の断面形について剪断応力分布を明らかにした。その結果断面の形によつては非常に大なる剪断応力を生ずるものがあることがわかつた。なお本報告は宮尾が日本機械学会第33期定時総会において講演したもので、其後更に展開につき協力しつつ考察をすすめたものである。

### (註)

- (1) (3) (7) Love, Math, Elasticity, p.332, p 52, and p. 335.
- (2) (4) (6) C. B. Ling, J. Appl, physics, vol. 19, 1948, p. 405
- (5) Whittaker, Modern Analysis, p. 115
- (8) 宮尾, 金沢大学工学部紀要 vol. 1, No3, p. 109
- (9) 長元, 日本機械学会誌 vol. 61, No355 (昭23~4)